数理解析研究所講究録
503巻 1983年 19-35

Kac-Moody group
(Kac-Peterson の仕事の紹介)

名大・理 田中洋平 (Yôhei Tannaka)

complex semi-simple Lie algebra $\mathfrak{g}$は、対応するCartan matrix を用いて、生成元と関係式で表示される。又$\mathfrak{g}$に対応する simply connected なLie群Gは線型代数群の構造をもつ。一方Cartan matrix の条件を少しゆるめて得られる Lie環がKac-Moody Lie環である。

Kac と Peterson ([6],[7])はKac-Moody algebra に対応する"代数"群を定義して、有限次元の場合と類似ないくつかの結果を出した。

ここでは Kac-Moody groupの定義, flagvariety, 共役性, Peter-Weyl 型の定理について述べる。

§1. Kac-Moody Lie algebra と Kac-Moody group

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ ($|I|<\infty$, $a_{ij}\in\mathbb{Z}$) が(広義の) Cartan matrix であるとは次の条件(1)-(3)

(1) $a_{ii}=2$ ($\forall i\in I$)　　(2) $i\neq j$ の時 $a_{ij}\leq 0$

(3) $a_{ij}\neq 0$ なら $a_{ji}\neq 0$

を満たす時にいう。更に symmetrizable であるとは

(4) non-degenerate な対角行列 D で $DA=S$ が対称行列にできるようなものがある。

の成立する時とする。

有限次元 semi-simple Lie algebra から決まる本来の Cartan matrix は上の意味での symmetrizable な Cartan matrix であり、条件(4) の S が positive definite にとれるものとして特徴付けられる。ここではその様なAを finite type と呼ぶ。

<u>Definition of Kac-Moody algebra</u>

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$: Cartan matrix に対して以下の生成系と基本関係式で定義される Lie algebra を A に対応する Kac-Moody Lie algebra と~~呼~~び $\mathfrak{g}(A)$ と書く。

生成元 : $\{h_i, e_i, f_i\}_{i\in I}$

基本関係式 :
$$\begin{cases} [h_i,h_j]=0,\ [h_i,e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j \\ [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i \\ (\mathrm{ad}\,e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j)=0 \ (i\neq j),\quad \mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j)=0 \ (i\neq j) \end{cases}$$

各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{g}_i \underset{\mathrm{def.}}{=} \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}f_i$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に同型な $\mathfrak{g}(A)$ の subalgebra である。A が decomposable な時，即ちある置換行列 P があって

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

となれば $\mathfrak{g}(A) \cong \mathfrak{g}(B) \oplus \mathfrak{g}(C)$ である。以後 A は symmetrizable で indecomposable とする。

$\Pi = \{\alpha_i \mid i\in I\}$ を I で index された集合とし

$Q = \mathbb{Z}\Pi = \{\sum_{i\in I} n_i\alpha_i \mid n_i\in\mathbb{Z}\}$ とおく。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ は $\deg e_i = \alpha_i$, $\deg f_i = -\alpha_i$, $\deg h_i = 0$ により Q-graded になる。

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in Q} \mathfrak{g}_\alpha$$

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} = \sum_{i\in I}\mathbb{C}h_i$ で，各 $\mathfrak{g}_\alpha$ は ad $\mathfrak{h}$-同時固有空間になる。

$\Delta \underset{\mathrm{def.}}{=} \{\alpha\in Q\setminus\{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ を root 系と呼ぶ。

$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ (disj.) ここで $\Delta_+ = \Delta\cap\{\sum n_i\alpha_i \mid n_i\geq 0\}$, $\Delta_- = -\Delta_+$

$r_i \in GL(\mathfrak{h})$ $(i\in I)$ を

$r_i(h_j) = h_j - a_{ji}h_i$ $(j\in I)$ と定義する。

$W = \langle r_i \mid i\in I\rangle$ を Weyl group と呼ぶ。

$(W, \{r_i \mid i\in I\})$ は Coxeter 系になる。W は Q にも作用する。

$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$ $(j\in I)$

$\Delta^R \underset{\text{def.}}{=} W(\Pi)$ の元を real root

$\Delta^I \underset{\text{def.}}{=} \Delta \setminus \Delta^R$ の元を imaginary root と呼ぶ。

$\alpha \in \Delta^R$ に対して $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ である。

$\mathfrak{g}$-module (π, V) が integrable であるとは、任意の $e \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta^R$ に対して、$\pi(e)$ が locally nilpotent である時にいう。

（この条件は $\alpha \in \Pi$ に対して成り立てば十分である。）

<u>Definition of Kac-Moody group</u>

G^* : 加法群 $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta^R)$ の free group

$i_\alpha : \mathfrak{g}_\alpha \longrightarrow G^*$ を cannonical inclusion とする。

(π, V) : integrable $\mathfrak{g}$-module に対して

$G^* \xrightarrow{\pi^*} GL(V)$ を

$$\pi^*(i_\alpha(e)) = \exp(\pi(e)) \quad (e \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta^R)$$

で定める。

$$G^* \supset N^* = \bigcap_{\substack{(\pi, V) \\ \text{integrable} \\ \text{module}}} \mathrm{Ker}(\pi^*)$$

$$G = G(A) \underset{\text{def.}}{=} G^*/N^*$$

を A に対応する Kac-Moody group と呼ぶ。

$q : G^* \to G$ を cannonical projection とする。$e \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $(\alpha \in \Delta^R)$

$x_\alpha(e) \underset{\text{def.}}{=} q(i_\alpha(e))$, $\quad U_\alpha \underset{\text{def.}}{=} x_\alpha(\mathfrak{g}_\alpha)$ とおく。

U_α は additive な G の 1-parameter subgroup である。

G は U_α $(\alpha \in \pm\Pi)$ で生成され，$[G, G] = G$ となる。

$U_\pm \underset{def.}{=} \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Delta^R{}_\pm \rangle$ （複号同順）

とおく。ここで $\Delta^R_\pm = \Delta^R \cap \Delta_\pm$

例 1) finite type

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$：有限次元 $\Longleftrightarrow$ A：finite type

有限次元の complex simple Lie algebra は全てこの様にして得られる。$\mathfrak{h}$ は Cartan subalgebra で，Δ は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する本来の意味でのルート系と同一視できる。$\Delta^R = \Delta$ となる。(π, V) を integrable $\mathfrak{g}$-加群とすれば $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ の作用は locally finite. 従って V は有限次既約表現の和になる。$\mathfrak{g}$ に対応する simply connected な simple Lie group $\tilde{G}$ は各 $\alpha \in \Delta$ に対応する additive な 1-parameter subgroup y_α で生成される。Kac-Moody Lie group G の 1-parameter subgr. U_α, U_β の commutator relation は対応する y_α, y_β と同じになる。これより G は $\tilde{G}$ に同型である事が示される。(Cf. [13]). U_- は U_+ に共役で，U_+ は maximal な unipotent subgroup である。

例 2) affinte type

A が affine type とは次が成り立つ時で，$\mathfrak{g}(A)$ を affine Lie alg. と呼ぶ。

(ﾛ) 条件(4)の D が singular な positive semi-definite matrix になるように D をとる事ができる。

extended Cartan matrix $A=\tilde{X}_\ell$ は affine type である。即ち $\Delta^{(0)}$ を type X_ℓ の root 系、$\Pi^{(0)}=\{\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha_\ell^{(0)}\}$ をその simple root 系、$\phi=\sum_{i=1}^{\ell} m_i\alpha_i^{(0)}$ を highest root $\alpha_0^{(0)}=-\phi$ とおいて

$$a_{ij} = \frac{2\langle\alpha_i^{(0)},\alpha_j^{(0)}\rangle}{\langle\alpha_i^{(0)},\alpha_i^{(0)}\rangle} \qquad (i,j=0,1,\cdots,\ell)$$

で与えられる。$X_\ell^{(1)}$ 型と呼ぶ。この時 $\mathfrak{g}(A)$ は次の様な realization をもつ。

$\mathfrak{g}^{(0)}$ を type X_ℓ の simple Lie algebra とする。

$$\mathfrak{g}(A) = \mathbb{C}\cdot c \oplus \mathfrak{g}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t,t^{-1}]$$

c は $\mathfrak{g}(A)$ の center で

$$[X\otimes t^m, Y\otimes t^n] = m\delta_{m,-n}\langle X,Y\rangle c + [X,Y]\otimes t^{m+n}$$

$(X,Y\in\mathfrak{g}^{(0)}\ m,n\in\mathbb{Z},\ \langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{g}^0$ の Killing form$)$

$\mathfrak{h} = \mathbb{C}c + \mathfrak{h}^{(0)}\otimes 1 \qquad (\mathfrak{h}^{(0)}$ は $\mathfrak{g}^{(0)}$ の Cartan subalgebra$)$

$\alpha_i^{(0)}$ を $\alpha_i\ (i=1,\cdots,\ell)$ と同一視することにより、$\Pi^{(0)}\subset\Pi$, $\Delta^{(0)}\subset\Delta$ となる。

$\delta=\alpha_0+\sum_{i=1}^{\ell} m_i\alpha_i = \alpha_0+\phi$ は imaginary root で

$\Delta^I = \mathbb{Z}\delta\setminus\{0\} \qquad \mathfrak{g}_{n\delta} = \mathfrak{h}^{(0)}\otimes t^n \quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

$\Delta^R = \Delta^{(0)}+\mathbb{Z}\delta \qquad \mathfrak{g}_{\alpha+n\delta} = \mathfrak{g}_\alpha^{(0)}\otimes t^n \quad (\alpha\in\Delta^{(0)}, n\in\mathbb{Z})$

$\underline{\underline{G}}$を$\mathfrak{g}^{(0)}$に対応する simply conn.な simple algebraic group scheme
$\underline{\underline{U}}_\alpha$ $(\alpha\in\Delta^{(0)})$をαに対応する$\underline{\underline{G}}$の unipotent subgroup scheme
$\underline{\underline{U}}_\pm$を$\Delta_\pm$に対応した unipotent subgroup schemeとする。

$\mathfrak{g}^{(0)}$の有限次表現 $(\pi^{(0)}, V)$は$\mathfrak{g}/\mathbb{C}c\cong\mathfrak{g}^{(0)}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$の表現 $(\pi, V\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}])$を定め、これは integrable な$\mathfrak{g}$-module である。これより、Kac-Moody group $G=G(A)$から$\underline{\underline{G}}(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$への homomorphism ϕで

$$\phi(U_{\alpha+n\delta}) = \{u_\alpha(at^n)\in\underline{\underline{U}}_\alpha(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \mid a\in\mathbb{C}\}$$
$$(\alpha\in\Delta^{(0)},\ n\in\mathbb{Z})$$

となるものが存在する。ϕは全射で、$\mathrm{Ker}\,\phi\cong\mathbb{C}^*$は$G$の center である事が示される。この$\phi$によって

$$U_+ \cong \{g(t)\in\underline{\underline{G}}(\mathbb{C}[t]) \mid g(0)\in\underline{\underline{U}}_+(\mathbb{C})\}$$

$$U_- \cong \{g(t^{-1})\in\underline{\underline{G}}(\mathbb{C}[t^{-1}]) \mid g(0)\in\underline{\underline{U}}_-(\mathbb{C})\}$$

となる。例えば $A_\ell^{(1)}$型の場合

$$\underline{\underline{G}}=SL_{\ell+1} \qquad \underline{\underline{U}}_+=\left\{\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right\},\ \underline{\underline{U}}_-=\left\{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$G\supset U_+ = \begin{pmatrix}1+t\mathbb{C}[t] & & \mathbb{C}[t]\\ & \ddots & \\ t\mathbb{C}[t] & & 1+t\mathbb{C}[t]\end{pmatrix}$$

$$U_- = \begin{pmatrix}1+t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] & & t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\\ & \ddots & \\ \mathbb{C}[t^{-1}] & & 1+t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\end{pmatrix}$$

§2. flag variety，共役性

2.1. 各 $i\in I$ に対し、 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$ より

$\phi_i : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow G$ が定まる。

$$\begin{cases} \phi_i\left(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = x_{\alpha_i}(ae_i) \\ \phi_i\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\right) = x_{-\alpha_i}(af_i) \end{cases} \qquad a\in\mathbb{C} \text{ となる。}$$

$G_i \underset{def.}{=} \mathrm{Im}\,\phi_i$, $\quad H_i \underset{def.}{=} \phi_i\left(\left\{\begin{pmatrix}a & \\ & a^{-1}\end{pmatrix} \,\middle|\, a\in\mathbb{C}^*\right\}\right)$

$N_i \underset{def}{=} N_{G_i}(H_i)$, $\quad H \underset{def}{=} \langle H_i\rangle$, $\quad N \underset{def.}{=} \langle N_i\rangle$ とおく。

H は $U_\pm$ を normalize する。 $B_\pm \underset{def.}{=} \langle H, U_\pm\rangle = H\cdot U_\pm$ とおく。

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & N/H \\ \cup & & \cup \\ r_i & \longmapsto & (N_i \setminus H)/H \end{array}$$

は同型写像になる。

<u>Th. 1</u> (1) (G, B_+, N, S) は Tits system である。

(2) $I\supset X$ に対応する parabolic subgroup を P_X, W の部分群 W_X とすると、

$$G = \bigcup_{\substack{w\in W/W_X \\ (\text{disjoint})}} B_+ w P_X \qquad (\text{Bruhat 分解})$$

$$G = \bigcup_{w\in W/W_X} B_- w P_X \qquad (\text{Birkoff 分解})$$

注) Th 1(1) から Marcuson([9]), Moody-Teo([11]), Morita([12]) の結果が導かれる。

有限型の場合 Bruhat 分解と Birkoff 分解は同値なもの。W の最長元 w_0 による left translation で一方から他方が出る。

$P_+ \underset{\mathrm{def.}}{=} \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid 0 \le \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \quad {}^\forall h_i\}$ とおく。

$\Lambda \in P_+$ に対して次の様な integrable $\mathfrak{g}$-module $(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ が同型を除いて unique に存在する。

(cf. Lepowsky [8], Kac [5], etc)

$0 \neq {}^\exists v_\Lambda \in L(\Lambda)$ があって次の性質を満たす。

$$\begin{cases} L(\Lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_\Lambda \\ \pi_\Lambda(h) v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda \\ \pi_\Lambda(\mathfrak{g}_\alpha) v_\Lambda = 0 \quad ({}^\forall \alpha \in \Delta_+) \end{cases}$$

$(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ は irreducible である。$\mathfrak{h}$ の作用に関して

$$L(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L(\Lambda)_\lambda$$ と weight 空間分解

ができる。Λ は $L(\Lambda)$ の highest weight になる。

$\lambda \in W(\Lambda)$ なら $L(\Lambda)_\lambda$ は 1 次元になる。

$\Lambda \in P_+$ を固定する。

$$Y \underset{\mathrm{def.}}{=} G \cdot [v_\Lambda] \subset \mathbb{P}(L(\Lambda)) \left(= L(\Lambda) - \{0\} / \mathbb{C}^*\right)$$

を flag variety と呼ぶ。

$\lambda \in W(\Lambda)$ に対し

$$Y_\pm(\lambda) = U_\pm \cdot [v_\lambda] \subset Y$$ とおく。

$$(0 \neq v_\lambda \in L(\Lambda)_\lambda)$$

$$\mathbb{P}(L(\Lambda)) = \bigcup_{\substack{0 \neq U \subset L(\Lambda) \\ \text{有限次元}}} \mathbb{P}(U)$$

により、$\mathbb{P}(U)$ の Zariski (或いは通常の) topology から $\mathbb{P}(L(\Lambda))$ の位相を定める。

$X = \{ i \in I \mid \Lambda(h_i) = 0 \}$ とすれば $W(\Lambda)$ と W/W_X は bijective に対応する。

$$\begin{array}{ccc} W(\Lambda) & \longleftrightarrow & W/W_X \\ \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!| \\ w(\Lambda) & \longleftrightarrow & wW_X \end{array}$$

$W(\Lambda)$ 上の order を、対応する W/W_X 上の Bruhat order により定める。

<u>Th. 2</u> (1)
$$V = \bigcup_{\substack{\lambda \in W(\Lambda) \\ (\mathrm{disj})}} V_+(\lambda) \qquad (\text{Bruhat 分解})$$
$$= \bigcup_{\substack{\lambda \in W(\Lambda) \\ (\mathrm{disj.})}} V_-(\lambda) \qquad (\text{Birkoff 分解})$$

(2)
$$\overline{V_+(\lambda)} = \bigcup_{\lambda \geqq \mu} V_+(\mu)$$
$$\overline{V_-(\lambda)} = \bigcup_{\mu \geqq \lambda} V_-(\mu)$$

$V \ni [v_\Lambda]$ の stabilizer は Parabolic subgroup P_X に等しいので Th 2 の (1) はそれぞれ G の Bruhat 分解, Birkoff 分解に対応している。各 $V_+(\lambda)$ は有限次元, $V_-(\lambda)$ は finite codimension である。通常の位相から誘導された位相に関して Bruhat 分解は V の cell 分割を与える。従って V の Poincaré 級数は Coxeter system (W, S) の言葉で表わす事ができる。

2.2. $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ とおく。$\mathfrak{g}$ が finite type の時 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}_\pm$ はそれぞれ Cartan subalgebra, Borel subalgebra であり，その $Ad(G)$ 共役類は、各々 maximal ad$\mathfrak{g}$-diagonalizable abelian subalgebra, maximal solvable algebra として特徴付けられた。一般の Kac-Moody Lie algebra でも同様の特徴付けがある。

<u>Th.3</u> $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{s}$ が maximal ad$\mathfrak{g}$-diagonalizable abelian subalgebra なら $\mathfrak{s}$ は $Ad(G)$ の元によって $\mathfrak{h}$ にうつされる。(このような $\mathfrak{s}$ を Cartan subalgebra と呼ぶ。)

<u>Cor.</u> $\mathfrak{g}(A_1) \cong \mathfrak{g}(A_2)$ なら A_1 と A_2 は"同じ"。即ち A_1 と A_2 の size は等しく，ある置換行列 P があって

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

$\mathfrak{g}$ の subalgebra $\mathfrak{a}$ が completely solvable subalg. とは ad$\mathfrak{a}$-stable な subspace の列

$$\cdots \mathfrak{a}_{-2} \supset \mathfrak{a}_{-1} \supset \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \text{ で } \mathfrak{g} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{a}_i$$

$\dim \mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1} = 1$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$ となるものがとれる時とする。maximal completely solvable subalgebra を Borel subalg. と呼ぶ。$\mathfrak{b}_\pm$ は Borel subalg. である。

<u>Th.4</u> completely solvable algebra はある Borel alg. に含まれる。Borel subalgebra は $\mathfrak{b}_+$ か $\mathfrak{b}_-$ に $Ad(G)$-共役である。(注：$\dim\mathfrak{g}=\infty$ の時 $\mathfrak{b}_+$ と $\mathfrak{b}_-$ は $Ad(G)$-共役ではない。)

§3. regular functions, Peter-Weyl型の定理

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$をKac-Moody Lie algebra, Gを対応するKac-Moody Lie group とする。$\mathfrak{g}$の involutive な automorphism ω を

$$\omega(e_i)=-f_i,\quad \omega(f_i)=-e_i,\quad \omega(h_i)=-h_i$$

で定義する。ωは G の automorphism を引き起すがこれも同じωであらわす。$(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ $(\Lambda\in P_+)$ に対して、$\pi_\Lambda^*=\pi_\Lambda\circ\omega$ も integrable $\mathfrak{g}$-module になる。π_Λ^* の表現空間を$L^*(\Lambda)$と表わし、$v_\Lambda(\in L(\Lambda))$に対応する元を$v_\Lambda^*$と書く。$L^*(\Lambda)\times L(\Lambda)$ 上に G-invariant な bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$で、$\langle v_\Lambda^*, v_\Lambda\rangle=1$ となるものが存在して unique である。$\langle\ ,\ \rangle$ は non-degenerate であり $L^*(\Lambda)\subset(L(\Lambda))^*$ とみなせる。

real root の 列 $\overline{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ (重複も許す) に対して 写像 $x_{\overline{\beta}}$ を

$$\begin{aligned} x_{\overline{\beta}}:\ \mathfrak{g}_{\beta_1}\times\cdots\times\mathfrak{g}_{\beta_k} &\longrightarrow G\\ (e_1,\cdots,e_k) &\longmapsto x_{\beta_1}(e_1)\cdots x_{\beta_k}(e_k)\end{aligned}$$

と定める。G上の$\mathbb{C}$-valued function f が weakly-regular であるとは、任意の$\overline{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ $(\beta_i\in\Delta^R)$ に対して $f\circ x_{\overline{\beta}}$ が $\mathfrak{g}_{\beta_1}\times\cdots\times\mathfrak{g}_{\beta_k}$ 上の polynomial function になる事をいう。weakly-regular

な function 全体のなす algebra を $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ と書く。 V が integrable $\mathfrak{g}$-module の時, $v^* \in V^*$, $v \in V$ に対して $f_{v^*, v}(g) = \langle v^*, g(v) \rangle$ は weakly-regular function である。

$U_\pm$ の subgroup $U'_\pm$ が large subgroup であるとは 有限個の G の元 $g_1, \cdots, g_m$ があって $\bigcap_{i=1}^{m} g_i U_\pm g_i^{-1} \subset U'_\pm$ となる時にいう。 $f(g) \in \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ が (strongly-) regular であるとは, ある large subgroup $U'_\pm \subset U_\pm$ があって

$$f(u_- g u_+) = f(g) \qquad (\forall u_\pm \in U'_\pm, \ \forall g \in G)$$

が成り立つ時にいう。regular function 全体は $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ の subalgebra を成す。これを $\mathbb{C}[G]$ で表わす。 $\mathbb{C}[G]$ は G の元による left multiplication 及び right multiplication に関して閉じている。 $v \in L(\Lambda)$ $v^* \in L^*(\Lambda) \subset (L(\Lambda))^*$ をとってくると $f_{v^*, v}(g)$ は regular function になる。

<u>Th.5</u>

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\Lambda \in P_+} L^*(\Lambda) \otimes L(\Lambda) & \longrightarrow & \mathbb{C}[G] \\ \cup & & \cup \\ v^* \otimes v & \longmapsto & f_{v^*, v}(g) \end{array}$$

は $G \times G$-module isomorphism である。

つまり, $\mathbb{C}[G]$ の元は $L(\Lambda)$ の "matrix element" で張られるものとして特徴付けられる。

G が finite type の時 $U_- H U_+ \subset G$ が Zariski

denseである事より $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ は G の座標環に等しくなる。$\{e\}$ は large subgroup なので $\mathbb{C}[G]_{w.r.} = \mathbb{C}[G]$
$L(\Lambda)$ $(\Lambda \in P_+)$ は有限次元であるから $L^*(\Lambda) = L(\Lambda)^*$。
Th.5 はこの場合 淡中-duality（或いはPeter-Weylの定理の algebraic version）に他ならない。

affine type $X_\ell^{(1)}$ の場合，$\mathfrak{G}$ の有理表現

$$\pi : \mathfrak{G} \longrightarrow GL_N$$

より定まる G の表現　（$G/\text{center} \cong \mathfrak{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$）

$$\pi^G : G \longrightarrow GL_N(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

$$\pi(g) = \left(\sum_k a_{ij}^{(k)}(g) t^k\right)_{1 \le i, j \le N}$$

とすれば $a_{ij}^{(k)}(g)$ は weakly regular function で $a_{ij}^{(k)}(cg) = a_{ij}^{(k)}(g)$.（ここで c は G の center の元）となる。ところが Th.5 から $f(cg) = f(g)$ $({}^\forall c \in \text{center}\, G)$ となるような regular function は constant しかない。従って $\mathbb{C}[G]_{w.r.} \supsetneqq \mathbb{C}[G]$。

一般に $\dim \mathfrak{g} = \infty$ の場合は $\mathbb{C}[G]_{w.r.} \supsetneqq \mathbb{C}[G]$ である。$(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ の matrix coefficient は regular function になれない。

$\mathbb{C}[G]^{U_+} = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gu) = u, {}^\forall g \in G, {}^\forall u \in U_+\}$ は left-multiplication により G-module になる。

$\Lambda \in P_+$ に対して $\quad \theta_\Lambda = f_{v^*_\Lambda, v_\Lambda}$

$$S_\Lambda = \{ f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gb) = \theta_\Lambda(b) f(g) \quad \forall g \in G, \forall b \in B_+ \}$$

とおく。S_Λ は $\mathbb{C}[G]^{U_+}$ の G-submodule になる。

<u>Th.6</u> (1) $\mathbb{C}[G]^{U_+} = \bigoplus_{\Lambda \in P_+} S_\Lambda$

(2) $$\begin{array}{ccc} L^*(\Lambda) & \longrightarrow & S_\Lambda \\ \cup & & \cup \\ v^* & \longmapsto & f_{v^*, v} \end{array}$$ は同型写像.

G が有限次元の場合 Th.6 (2) は Borel-Weil の定理である。

§4. 結び

$\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_k)$ $(\beta_i \in \Delta^R)$ に対し $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ の ideal $I_{\bar{\beta}}$ を $I_{\bar{\beta}} \underset{def.}{=} \{ f \in \mathbb{C}[G]_{w.r.} \mid f \circ x_{\bar{\beta}} \equiv 0 \text{ on } \mathfrak{g}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\beta_k} \}$ とし、$\{I_{\bar{\beta}}\}$ により $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ を topological alg. とする。

G の点と $\operatorname{Specm} \mathbb{C}[G]_{w.r.} = \{$closed な codim 1 の ideal 全体$\}$ は自然な対応により bijective に対応する. 逆元 $i : G \to G$ かけ算 $m : G \times G \to G$ より誘導される, $i^* : \mathbb{C}[G]_{w.r.} \to \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ と $m^* : \mathbb{C}[G]_{w.r.} \longrightarrow \mathbb{C}[G]_{w.r.} \hat{\otimes} \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ によって G の群構造は決定される。$\mathbb{C}[G]$ では G が無限次元の時うまくいかない。(e.g. $i^*(\mathbb{C}[G]) \not\subset \mathbb{C}[G]$.). 一方 $G \times G$-module として. $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ はよくわからない。(integrable も保証されない)

Hopf alg. str. を持ち、しかも $G\times G$-module としての構造がわかるような うまい $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ の closed subalg. がみつかる事が望ましい。

Garland（[2]）は affine type の場合に対応する "analytic" な群を構成した。無限次元の場合、応用の為には Kac-Moody group では小さいのかも知れない。（cf. [1]）

文献

[1] Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa : Transformation groups for soliton equations, RIMS preprints

[2] Garland : The arithmetic theory of loop groups, Publ. Math. I.H.E.S. vol 52

[3] 岩堀-横沼 : Kac-Moody Lie 環と Macdonald 恒等式，『数学』vol 33

[4] Kac : Simple irreducible Lie algebras with finite growth, Math. USSR-Izvestiya vol 32 (1968)

[5] —— : Infinite dimensional Lie algebras, Dedekind η-function, classical Möbius function and the very strange formula, Adv. Math. 30

[6] Kac-Peterson : Infinite flagvarieties and conjugacy theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 80 (1983)

[7] Kac-Peterson : Regular functions on certain infinite dimensional groups, to appear in "Arithemetic and Geometry", Birkhäuser, Boston

[8] Lepowsky : Lectures on Kac-Moody Lie algebras, Univ. Paris VI

[9] Marcuson : Tits' systems in generalized non-adjoint Chevalley groups, J. Alg. 34

[10] Moody : Lie algebras associated with generalized Cartan matrices, Bull. A.M.S. 73

[11] Moody-Teo : Tits' systems with crystallographic Weyl groups, J. Alg. 21 (1972)

[12] Morita : Tits' systems in Chevalley groups over Laurent polynomial rings, Tsukuba J. Math. 3

[13] Steinberg : Lectures on Chevalley groups, Yale Univ.